

For test

Илья Yaroshevskiy

25 июня 2022 г.

Содержание

1	Задание 1	1
2	Задание 2	1
3	Задание 3	2
4	Задание 4	2
5	Задание 5	2
5.1	Алгоритм	2
5.2	Нахождение интегрирующего множителя	2
6	Задание 6	3
7	Задание 8	3
8	Полезные техники	4
8.1	Линейное однородное уравнение n-го порядка	4
	1. задача	
	2. разделяющиеся переменные	
	3. линейное	
	4. Бернулли	
	5. УПД	
	6. понижение порядка	
	7. понижение порядка	
	8. метод последовательных приближений Пикара	

1 Задание 1

Фезека

2 Задание 2

Уравнения приводящиеся в вид

$$\begin{aligned} f(x)dx &= g(y)dy \\ \Downarrow \\ \int f(x)dx &= \int g(y)dy \\ \Downarrow \\ F(x) &= G(y) \end{aligned}$$

3 Задание 3

Линейные уравнения первого порядка

$$y' + a(x)y = f(x)$$

$$u(x) = \exp \int a(x)dx$$

$$y = \frac{\int u(x)f(x)dx + C}{u(x)}$$

4 Задание 4

Уравнение вида $y' + a(x)y = b(x)y^m$

При $m = 0$ - линейное уравнение

$m = 1$ - уравнение с разделяющимися переменными

Иначе сводится к линейному подстановкой $z = y^{1-m}$ в уравнение $z' + (1-m)a(x)z = (1-m)b(x)$

5 Задание 5

Уравнения вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

уравнение в полных дифференциалах если $\exists u(x, y) : du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

И $Q'_x = P'_y$

Тогда решение $u(x, y) = C$

5.1 Алгоритм

1. Запишем систему

$$\begin{cases} u'_x = P(x, y) \\ u'_y = Q(x, y) \end{cases}$$

2. Проинтегрируем первое уравнение по x , считая y константой, так-же примем C за $\varphi(y)$

$$u(x, y) = \int P(x, y)dx + \varphi(y)$$

3. Продифференцируем полученное $u(x, y)$ по y и подставим во второе уравнение

$$u'_y(x, y) = \left(\int P(x, y)dx \right)'_y + \varphi'_y(y) = Q(x, y)$$

4. Проинтегрируем полученное уравнение и найдем $\varphi(y)$

$$\varphi(y) = \int \left[Q(x, y) - \left(\int P(x, y)dx \right)'_y \right] dy$$

5. Подставим $\varphi(y)$ в $u(x, y)$, получим итоговое решение

$$u(x, y) = C$$

5.2 Нахождение интегрирующего множителя

Если $\frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}$

Находим такое $\varphi(x, y)$, что:

$$Q\varphi'_x - P\varphi'_y = \varphi(P'_y - Q'_x)$$

1. Если $\varphi(x, y) = \varphi(x)$, то найдем его из уравнения

$$\frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{Q} (P'_y - Q'_x)$$

2. Если $\varphi(x, y) = \varphi(y)$, то найдем его из уравнения

$$\frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dy} = -\frac{1}{P} (P'_y - Q'_x)$$

3. Если φ зависит от обоих переменных, тогда если $\exists z : \varphi(z) = \varphi(x, y)$, то найдем φ из уравнения

$$\frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dz} = \frac{P'_y - Q'_x}{Qz'_x - Pz'_y}$$

6 Задание 6

Уравнение вида

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

1. $y'' = f(x)$

Возьмем новую функцию $p(x) : y' = p(x)$

Тогда решим $p' = f(x)$, затем решим $y' = p(x)$

2. $y'' = f(y)$

Возьмем новую функцию $p(y) : y' = p(y)$

Тогда решим $\frac{dp}{dy} p = f(y)$, затем решим $y' = p(y)$

3. $y'' = f(y')$

Возьмем новую функцию $p(x) : y' = p(x)$

Тогда решим $p' = f(p)$, затем решим $y' = p(x)$

4. $y'' = f(x, y')$

Возьмем новую функцию $p(x) : y' = p(x)$

Тогда решим $p' = f(x, p)$, затем решим $y' = p(x)$

5. $y'' = f(y, y')$

Возьмем новую функцию $p(y) : y' = p(y)$

Тогда решим $\frac{dp}{dy} p = f(y, p)$, затем решим $y' = p(y)$

6. $F(x, y, y', y'')$ - однородная функция аргументов y, y', y''

$F(x, ky, ky', ky'') = k^m F(x, y, y', y'') \Rightarrow$ однородная

Используем подстановку $y = e^{\int z dx}$

Находим z , затем находим $y(x) = C_2 e^{\int z dx}$

7. $F(x, y, y', y'')$ - точная производная

Если найдем $\Phi(x, y, y') : F(x, y, y', y'') = \Phi'_x(x, y, y')$, то решение: $\Phi(x, y, y') = C$

7 Задание 8

Метод Пикара

Дано $x_0, y' = f(x, y), y_0 = y(x_0)$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, y_{n-1}(\xi)) d\xi$$

• Пример

$$t_0 = 0 \begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = tx \end{cases}$$

Прим. $\dot{u} = u'_t$

$$\begin{aligned}
 x(0) &= 0, y(0) = 0 \\
 x_n &= x_0 + \int_0^t (x_{n-1}(\xi) - y_{n-1}(\xi)) d\xi \\
 y_n &= y_0 + \int_0^t (\xi x_{n-1}(\xi)) d\xi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 1 + t \\
 y_1 &= \frac{t^2}{2} \\
 x_2 &= 1 + t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} \\
 y_2 &= \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}
 \end{aligned}$$

• **Пример**

$$\begin{aligned}
 y'' - y' \sin x - x^2 &= 0 \\
 y(0) = 1, y'(0) &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = z \sin x + x^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 y_0 &= 1, z_0 = 0 \\
 y_n &= y_0 + \int_0^x z_{n-1}(\xi) d\xi \\
 z_n &= z_0 + \int_0^x (z_{n-1}(\xi) \sin \xi + \xi^2) d\xi \\
 z_1 &= \frac{x^3}{3} \\
 y_2 &= 1 + \frac{x^4}{12}
 \end{aligned}$$

8 Полезные техники

8.1 Линейное однородное уравнение n-го порядка

Имеем уравнение: $y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n y(x) = 0$

Решим такое уравнение: $\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$

1. Все корни различные

Тогда решение: $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$

2. Есть кратные корни

Есть n корней

Различные корни: $\lambda_1, \dots, \lambda_m$

Степени корней: k_1, \dots, k_m

Тогда решение:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} + \dots + C_{k_1} x^{k_1-1} e^{\lambda_1 x} + \dots + C_{n-k_m+1} e^{\lambda_m x} + C_{n-k_m+2} x e^{\lambda_m x} + \dots + C_n x^{k_m-1} e^{\lambda_m x}$$